A kombinatorikai képességek fejlettségének vizsgálata alsó tagozaton

Fülöp Zsolt
Károli Gáspár Református Egyetem, Nagykőrös

Bevezetés

Az alsó tagozaton a kombinatorika alapjainak bevezetése leginkább a gyakorlati, játékos feladatokon keresztül valósul meg. Az alapfogalmak, mint a permutáció (sorrendek vizsgálata), variáció (választás egy adott számú elemből a sorrend figyelembevételével) és kombináció (ahol a kiválasztás során a sorrend nem számít) sokszor nem explicit módon, hanem a gyerekek mindennapi tapasztalatain keresztül jelennek meg. Például egy-egy egyszerűbb oktatási mozzanatban, amikor a gyerekek különböző színek, számok vagy alakzatok közül választanak, illetve amikor egyes elemeket sorba rendeznek, a gondolkodási folyamat során kombinatorikai elveket alkalmaznak. A kombinatorikai gondolkodás fejlesztésében nagy szerepe van az interaktív játékoknak, ahol például különböző színű vagy nagyságú tárgyakból, figurákból válogathatnak, illetve sorba rendezhetnek különböző előre megadott feltételek szerint. A kombinatorikai feladatok megoldása fejleszti a logikai gondolkodást, a koncentrációt (részletekre való odafigyelés), továbbá jelentős szerepük van a különböző matematikai fogalmak elmélyítésében is. Ebben a vonatkozásban külön kiemelnénk a számolási készségek erősítésében, valamint a geometriai összefüggések felismerésében betöltött szerepét. A számolás a kombinatorikai alapozás egyik legfontosabb eszközeként jelenik meg a tananyagban az általános iskola alsó tagozatain. A tanítóknak lehetőségük van arra, hogy egyszerű feladatokon keresztül megértessék a tanulókkal, hogy különböző számkártyák felhasználásával hányféleképpen alkothatnak számokat, majd ezekkel a számokkal aritmetikai műveleteket végezzenek el. A különböző szempontok szerinti sorba rendezésnek pedig jelentősége van többek között a rendezési relációk megalapozásában is. Szükségesnek tartjuk külön kiemelni a kombinatorikai feladatok és a geometriai problémák közötti szoros kapcsolatot is. Az alsó tagozaton a tanulók gyakran találkoznak egyszerű geometriai alakzatok, például háromszögek, négyzetek, téglalapok halmazba rendezésével, csoportosításával vagy az átlók számának meghatározásával, ami szintén a kombinatorikai alapelveket érinti. Az ilyen feladatok során a gyerekek szembesülnek a lehetséges elrendezések, számolások, kiválasztások és variációk témakörével.

A kombinatorika oktatása a magyarországi iskolák alsó tagozatain viszonylag kevésbé hangsúlyos, mivel az alapfokú matematika tananyagban elsősorban a számolás, geometriai formák, mértékegységek, alapvető műveletek és egyszerű aritmetikai gondolatmenettel kapcsolatos szöveges feladatok szerepelnek. Ilyen körülmények között a kombinatorikai gondolkodásmód kialakítása, amely a lehetséges elrendezések, kiválasztások, csoportosítások és sorrendek számítására összpontosít, a matematika oktatásában az alsó tagozaton háttérbe szorul, amely főként az ilyen típusú tanórák alacsony számában és az oktatás során feldolgozott matematikai problémák sokszínűségének hiányában mutatkozik meg.

1. A kombinatorika oktatásának sajátosságai alsó tagozaton

Az alsó tagozaton különös jelentősége van annak, hogy a tanulók konkrét tárgyi tevékenységeken keresztül tapasztalatokat szerezzenek a különböző kombinatorikai problémákról. Ennek az alapozásnak a hiánya okozza azt, hogy a felső tagozaton és a középiskolában a tanulók a megfelelő tapasztalatok nélkül „tanulnak be” szimbolikusan, képletek formájában közölt megoldási módszereket, amelyeknek nem ismerik a konkrét, tárgyi megközelítését. Ez a későbbiekben oda vezethet, hogy a tanulók nem képesek önállóan kombinatorikai feladatok megoldására, így a továbbiakban nemcsak a kombinatorika, hanem az erre szervesen épülő valószínűség-számítás is sokak számára nehezen érthetővé válik. Lovász László és munkatársai a Kombinatorika című könyvben részletesen foglalkoznak a kombinatorika alapjaival, módszereivel és alkalmazásaival, különös tekintettel arra, hogyan tanítható és tanulható hatékonyan ez az elmélet (Lovász 2014). A szerzők hangsúlyozzák, hogy a kombinatorika oktatásában az intuíció fejlesztése kulcsfontosságú, és kiemelik, hogy a kombinatorika tanulása akkor a leghatékonyabb, ha a diákok konkrét problémák megoldásán keresztül ismerik meg az elméletet. Éppen ezért az egyes fejezetek gyakran egy-egy gyakorlati probléma felvázolásával indulnak, amelyeket azután az elméleti háttér és a módszerek tárgyalása követ. Annak ellenére, hogy a könyv középiskolai matematikai problémák bemutatására szolgál, a benne szereplő alapvető kombinatorikai gondolatokat és egyszerűbb feladatokat azok a pedagógusok is jól tudják alkalmazni, akik az alsó tagozaton szeretnék megalapozni és fejleszteni a gyerekek logikai és kombinatorikai képességeit. A könyvben szereplő módszertani tanácsokból olyan alapelvek és oktatási gyakorlatok vezethetők le, mint például az egyszerű problémákból való kiindulás, a játékos megközelítés, a vizualizáció és konkrét példák alkalmazása, a problémafelvetés és kísérletezés, a számolási készségek fejlesztése, valamint a kapcsolódás más tantárgyakhoz (például környezetismeret vagy rajz). Varga Tamás nyomán a kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének lépcsőfokai tíz szakaszra oszthatók, amelyek közül az első négy különösen az általános iskola 1-4. osztályára vonatkozik:

- Adott feltételnek megfelelő egy vagy több eset előállítása: a tanulók megtanulják figyelembe venni az adott feltételt a feladatok során.
- Minél több eset előállítása az adott feltétel szerint: az előállítások során a tanulók tartósan megtartják a szempontot, feltételt, és az előállított objektumokat megkülönböztetik, azonosítják.
- Az összes eset megkeresése a talált esetek rendezése és a rendszerben talált hiányok segítségével: a rendszerépítést a teljességre törekvés motiválja.
- Adott feltételhez tartozó esetek megkereséséhez rendszer kiépítése „előre”: a már végigjárt alkotásokhoz való gondolati hasonlóság alapján történik (C. Neményi 2015).

Az 5-10. lépcsőfokok a felsőbb évfolyamokon kerülnek előtérbe, és a kombinatorikus gondolkodás mélyebb megértését célozzák, ezért ezeket most nem részletezzük.

C. Neményi Eszter és Sztrókay Vera „Matematika segédanyag az esti tanítóképzéshez” című munkájában részletesen tárgyalja a matematika különböző területeit, beleértve a számfogalom kialakítását, a műveletek tanítását, a geometriai ismereteket, valamint a kombinatorikai és logikai gondolkodás fejlesztését, különös hangsúlyt fektetve a didaktikai módszerekre és a tanítási folyamat lépéseire. A tanulmányban megtalálható a különböző típusú kombinatorikus modellek, mint például a variációk, permutációk és kombinációk kettős szemlélettel való megközelítése. Egyrészt bemutatásra kerül az a képleteken alapuló magasabb matematikai eszköztár, amely egy leendő tanító tudástárában kell, hogy legyen a fejezet hatékony oktatásához. Ezzel párhuzamosan a szerzők bemutatják, hogy milyen módon lehet a kombinatorikai problémákat elemi módon bevezetni és feldolgozni az általános iskolai oktatásban. Továbbá a szerzők hasznos didaktikai tanácsokat adnak a kombinatorikus gondolkodás fejlesztéséhez, beleértve a tanulók motiválását és a problémamegoldó képességek erősítését. Heréndiné Kónya Eszter munkájában oktatási stratégiákon és mintafeladatokon keresztül részletesen megjelennek a tanulók fejlődési szintjeinek megfelelően a kombinatorikai feladatok egymásra épülő modelljei külön kitérve az alsó, illetve felső tagozat esetében alkalmazott stratégiákra. Külön hangsúlyt kap az a tény, hogy az alsó tagozaton a kombinatorika tanításában követelmény az olyan feladatmegoldó stratégiák ismerete, mint például az esetek megkülönböztetése, az összes eset felsorolása ötletszerűen vagy a rendszerezett/rendezett felsorolás. Ezeknek a stratégiáknak az alkalmazására épülnek majd később azok a feladatmegoldási módszerek, amelyek a felső tagozaton, illetve a középiskolában vannak jelen: szorzás módszere, összeadás módszere, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, rekurzió stb. (Heréndiné Kónya 2013).

A kombinatorikai képességek korai gyermekkorban történő fejlesztése a nemzetközi szakirodalomban is kiemelt szerepet kap. English például hangsúlyozza, hogy az 5-7 éves gyerekek is képesek megközelíteni kombinatorikai problémákat (English 1991). Megfigyelései szerint a gyerekek megoldásai főként az intuitív próbálkozásokon alapulnak, de már ebben a korban megfigyelhetők a rendszerezés és a logikus gondolkodás csírái, amelyek az oktatás révén fejleszthetők. Ugyanakkor kiemeli, hogy ebben az életkorban még gyakori az, hogy a gyerekek nem sorolják fel az összes lehetőséget, illetve nem képesek észlelni és kizárni az ismétléseket a felsorolások során. Az említett szerző egy másik művében azt is kiemeli, hogy a 8-11 éveseknél már összetettebb rendszerezési és logikai stratégiák figyelhetők meg (English 2005). Ebben az életkorban is a próbálgatás módszere a leggyakoribb (trial-and-error), viszont fokozatosan megjelenik a részleges rendezés, valamint a szisztematikusan készített felsorolási lista is. Ezek a stratégiák a gyermekek életkorával, tapasztalataival és problémamegoldó készségeivel összefüggésben fejlődnek. Rakic és munkatársai első évfolyamos tanulókkal végzett kutatás során arra az eredményre jutottak, hogy a tanulók differenciált matematikai feladatok megoldásával történő tanítása jelentősen befolyásolhatja a tanulók logikai-kombinatorikus gondolkodásának fejlődését az elemi matematikaoktatásban (Rakic et al. 2021). Lockwood és Gibson azt tapasztalták, hogy még egyetemi hallgatók esetében is azok a hallgatók, akik listaszerű felsorolási technikát alkalmaznak, általában hatékonyabbak a kombinatorikai problémák megoldásában, mint azok, akik nem. A szerzők hangsúlyozzák, hogy az összes eset rendszerezett felsorolása nemcsak egy eszköz a probléma megoldására, hanem a kombinatorikai struktúrák mélyebb megértésének elősegítője is lehet, mivel a hallgatók jobban érzékelik a kombinatorikai problémák logikai felépítését és szabályait (Lockwood–Gibson 2016). Zapata-Cardona a 6-8 éves gyermekek kombinatorikai feladatokhoz való hozzáállását és a pedagógusok által alkalmazható stratégiákat vizsgálja a kombinatorikus gondolkodás támogatása céljából. A kutatás klinikai interjúkon alapul, ahol a gyermekeknek manipulálható eszközöket biztosítottak a kombinatorikai feladatok megoldásához. Az eredmények rámutattak a kombinatorikus és a multiplikatív gondolkodás közötti szoros kapcsolatra, és hangsúlyozták, hogy a pedagógusoknak olyan stratégiákat kell alkalmazniuk, amelyek támogatják a multiplikatív gondolkodás fejlődését és a kombinatorikus számolási folyamatok elsajátítását. (Zapata-Cardona 2018).

A fentiekben ismertetett tanulmányokból egyértelműen kiderül, hogy a kombinatorika oktatásának kitüntetett fontossága van az alsó tagozaton is. A leghelyesebb oktatási stratégia lényege, hogy a kombinatorika feladatok behálózzák az egész matematika tananyagot, vagyis a tanulók minden fejezet keretében találkozzanak kombinatorikai példákkal és problémaszituációkkal. Viszont körvonalazódik egy olyan elképzelés is, hogy néhány tipikus probléma tárgyalása kedvéért érdemes külön fejezeteket fordítani a kombinatorika oktatására már alsó tagozaton is.

2. A kutatás megvalósítása

A kutatás előzményeként megemlíteném azt a tényt, amit minden évben tapasztalok, amikor a tanító szakos hallgatók oktatása során a kombinatorika oktatásának módszertana kerül előtérbe. A felvetődő leggyakoribb kérdés az, hogy egy alsó tagozaton oktató pedagógusnak miért kell rendelkeznie ezzel a tudásanyaggal, mivel a kombinatorika tényleges oktatása az általános iskola felső tagozatain kezdődik. A kérdés felvetése részben indokolt, mivel az alsós tankönyvekben viszonylag kevés tipikusan kombinatorikai feladattal találkozunk, azok is leginkább a rejtvények vagy a gondolkodtató, fejtörő feladatok kategóriában szerepelnek. Talán ez is lehet az egyik oka annak, hogy az alsós matematikaoktatásban ez a témakör háttérbe szorul. Ebből kifolyólag született meg az ötlet, hogy a pedagógusképzésben részt vevő hallgatókkal közösen egy felmérést végezzünk, amelyben a negyedik osztályos tanulók problémamegoldó képességét vizsgáljuk a kombinatorikai feladatok esetében. A mérésben 28 iskola 584 tanulója vett részt. A mérés során a tanulóknak egy 5 feladatból álló feladatlapot kellett megoldani az adott osztályokban tanító pedagógusok felügyeletével. A tanulók azt az utasítást kapták, hogy minden egyes megoldás esetében ne csak a számszerű adatot írják le, hanem valamilyen formában szemléltessék a megoldás menetét is. Ezzel latens módon az alsó tagozaton leginkább elterjedt „minden lehetőséget soroljunk föl!” eshetőségre gondoltunk, bár azt sem tartottuk kizártnak, hogy egyes tanulók valamilyen szabályszerűséget bírnak felfedezni. A feladatlapot jelen tanulmány szerzője állította össze. A feladatlapok kiértékelésében viszont a hallgatók is részt vettek, akik többek között azt a feladatot is kapták, hogy egy esszé formájában számoljanak be a feladatlapok feldolgozása során szerzett módszertani tapasztalataikról. Egy-egy hallgatóra körülbelül 25-30 tanulói dolgozat elemzése és kiértékelése jutott.

Kutatásaink során a következő hipotéziseket fogalmaztuk meg a negyedik osztályos tanulók problémamegoldó képességével kapcsolatban a kombinatorika területén:

- A tanulók képesek az esetek megkülönböztetésére, szétválasztására;
- A tanulók képesek az összes eset ötletszerű felsorolására;
- A tanulók képesek a rendszerezett felsorolásra;
- A tehetségesebb tanulók egy része már rendelkezik olyan alapvető problémamegoldási ötletekkel, amelyek a felső tagozatos tananyag részét képezik (szorzás módszere, összeadás módszere, esetek szétválasztása, kapcsolatok ábrázolása).

A tanulói problémamegoldó képességek mérésére szolgáló feladatlapon a következő feladatok szerepeltek.

1) Az 5; 0; 0 és 8 számkártyákból hány négyjegyű számot rakhatunk ki, ha minden számkártyát csak egyszer használhatunk fel?

2) Anna, Bea, Cili és Dóri színházba mennek, a jegyük négy egymás melletti székre érvényes. Hányféleképpen ülhetnek le, ha Bea és Cili egymás mellett akarnak ülni?

3) Az A, B, C és D betűkből négybetűs „szavakat” képezünk úgy, hogy minden betűt csak egyszer használhatunk fel. Az így kapott „szavakat” ábécésorrendbe helyezzük. Ebben a sorban hányadik „szó” lesz a BCAD?

4) András, Béla, Csaba és Dénes körmérkőzéses asztalitenisz-bajnokságot játszanak. Hány mérkőzésre kerül sor?

5) Annának két zöld és három fehér bögréje van. Ezeket szeretné egy polcon elhelyezni. Egy lehetséges elhelyezési sorrend a következő:

F F Z F Z

Hányféleképpen rendezheti sorba a bögréket? Sorold fel az összes lehetőséget!

A feladatokra adott válaszok megoszlását az alábbi táblázat szemlélteti.

	1. feladat	2. feladat	3. feladat	4. feladat	5. feladat
Jó válasz	75%	31%	35%	49%	27%
Rossz válasz	10%	33%	43%	30%	24%
Hiányos válasz	15%	33%	18%	17%	44%
Nem foglalkozott vele	0%	3%	4%	4%	5%

1. táblázat: A tanulói válaszok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Ahhoz, hogy a táblázat alapján átfogóbb képet kapjunk a tanulók teljesítményéről, szükségesnek tartjuk a következő megjegyzéseket. Mivel a megoldások döntő többsége az esetek felsorolásán alapult, amelyben az ötletszerű felsorolások részaránya dominált a rendezett felsorolásokhoz képest, ezért hiányos válasznak tekintettük azokat a próbálkozásokat, amelyek esetében a tanulók a sorba rendezéseknek legalább a felét megtalálták (viszont nem tudták felsorolni az összes lehetőséget). Kis részarányban szerepeltek helyes válaszok minden indoklás nélkül, ezeket is a hiányos válaszok közé soroltuk. A rossz válasz kategóriába azokat a megoldásokat soroltuk, ahol a helytelen felsorolások mellett jó sorba rendezések is szerepeltek, viszont ezek részaránya nem érte el az összes lehetőség számának a felét. Szintén a rossz válaszok közé kerültek azok a megoldások, ahol válaszként csak egy helytelen számadat szerepelt minden különösebb indoklás nélkül, illetve egyáltalán nem helytálló, észszerűtlen indoklással.

Az 1. feladat esetében, mivel a lehetséges sorba rendezések száma alacsony volt (számszerűen 6 négyjegyű szám volt a válasz), a tanuló háromnegyede az összes eset felsorolásával adott jó választ. A helyes válaszok esetében a tanulók döntő többsége rendszerezett felsorolással dolgozott, legtöbben először az 5-tel, majd a 8-cal kezdődő számokat sorolták fel. 11 tanuló a két darab 0-s számjegy helyzetére alapozta a rendszerezett felsorolást, egy ilyen példa a következő: 5008, 8005, 8500, 5800, 8050, 5080. A helyes válaszok esetében alacsony részarányban (körülbelül a válaszok egyötöde) szerepeltek ötletszerű felsorolások. Erre egy általunk kiragadott példa az 5008, 8050, 5800, 8500, 5080, 8005 sorrend. Viszont a különböző felsorolási mintázatok részarányának vizsgálata is különleges lehet, amelyre a jelen tanulmány terjedelme miatt nem térünk ki. Egy tipikusan rossz választ is kiemelnénk, amely szerint „5008 négyjegyű szám van”, ez a feladatban szereplő kérdés téves értelmezésére utal.

A 2. feladat esetében a helyes válasz a 12 lehetséges ülésrend, ezért az ötletszerű felsorolás hatékonysága jóval alacsonyabb volt. Véleményünk szerint leginkább ezzel magyarázható a jó válaszok, rossz válaszok, illetve a hiányos válaszok közel azonos részaránya. A rossz válaszok esetében két fő hibaforrást figyelhettünk meg, mindkettő az ötletszerű felsorolás alkalmazásából adódott. Egyrészt a felsorolás során a tanulók néhány helyes sorrend felsorolása után nem vették figyelembe a „Bea és Cili egymás mellett akarnak ülni” feltételt (vagy a probléma megoldása közben megfeledkeztek róla). Így a felsorolásban előfordultak olyan esetek is, amikor az említett két lány nem egymás mellé került, amely néhány esetben azt eredményezte, hogy a felsorolt ülésrendek száma meghaladta a 12-t. A rossz válaszok másik oka az volt, hogy a tanulók néhány ülésrend (az esetek többségében 3 vagy 4) felírása után válaszként az általuk felírt ülésrendek számát adták meg. Elhanyagolható volt azoknak a tanulóknak a száma, akik rossz válaszként indoklás nélkül egy számadatot írtak. A hiányos válaszadók között a legtöbben 8-10 helyes ülésrendet írtak fel, ők többségében véletlenszerű ötleteléssel dolgoztak, munkájukban kevésbé fedezhető fel a rendezett felsorolásra való hajlandóság. A hiányos válaszok közé soroltuk azokat a válaszokat is, amelyek esetében csak azokat az ülésrendeket írták le, ahol az egyik lány a másik bal oldalán ül, így a „6 ülésrend van” választ adták (nem vették észre, hogy a két lány egymáshoz képest fordítva is ülhet). A helyes válaszokat adó tanulóknak közel a fele (az összes tanuló 15%-a) csak azt a 6 válaszlehetőséget jelölte meg, ahol Bea Cili bal oldalán ül (vagy fordítva), majd a helyes válasz leírásakor néhány szóban utaltak rá (vagy egyszerűen csak egy oda-vissza nyíllal jelezték), hogy a két lány egymáshoz képest fordítva is ülhet. Az olyan tanulók között, akik mind a 12 helyes ülésrendet felsorolták, is nagyobb volt azoknak a részaránya, akik a rendszerezett felsorolást választották. Ezeknek a tanulóknak több mint a fele az ábécésorrendet követő mintázatot alkalmazta, viszont a többiek munkájában is érzékelhető volt a rendszerezett felsorolás jelenléte. Összesen 9 tanuló sorolta fel mind a 12 helyes ülésrendet teljesen véletlenszerű ötleteléssel, a felsorolás során bármilyen rendezettség nélkül. A fentieket figyelembe véve megfigyelhetjük, hogy az összes tanulónak közel 30%-a a rendezett felsorolást választotta. Ez negyedik osztályos tanulók körében pozitív ténynek minősül, viszont egy feladat megoldásainak elemzéséből nem áll módunkban általános tapasztalatokat levonni.

A 3. feladat értelmezésekor a problémát a szövegben szereplő ábécésorrendbe helyezés okozta. Ezekben az esetekben a mérésben részt vevő hallgatók, előzetes egyeztetésünk értelmében, segítettek az értelmezésben. Mivel itt az ábécésorrendbe helyezés már egyfajta rendszerezett felsorolást sugall, ezért elvárásaink között szerepelt, hogy a megfelelő sorrendbe rendezést több tanuló megtalálja, mint esetleg a 2. feladat esetében. Ez részben meg is történt, viszont elvárásainkhoz képest csekély mértékben. A feladat jellegéből kifolyólag csak azokat a válaszokat tekinthettük hiányos megoldásnak, ahol a BCAD szó előtt elhelyezkedő 8 szó közül valamelyik (vagy esetleg nem több, mint 3 szó) kimaradt, viszont a megoldás során látszott, hogy a tanuló helyesen értelmezte a feladatot. Ilyen módon ennek a feladatnak az esetében volt a legalacsonyabb a hiányos megoldások aránya a rossz megoldásokhoz viszonyítva. Összesen 11 olyan megoldást találtunk, amelyek esetében a tanulók tudatában voltak annak, hogy az A betűvel kezdődő szavak száma 6 (anélkül, hogy leírták volna), így csak a sorrendben következő három B betűvel kezdődő szó felsorolásával adtak helyes választ. Ezek a tanulók egy „előre kiépített" rendszer alapján gondolkodtak, amely a kombinatorikai képességek magasabb fejlettségének sajátja. Kevés olyan jó választ találtunk, ahol a tanulók a helyes ábécésorrendbe helyezésnél a 9. szó (BCAD) leírása után adták meg a helyes választ. A leggyakoribb esetben a jó választ adó tanulók helyesen ábécésorrendbe tették az A, illetve B betűvel kezdődő „szavakat", majd utána számolták ki a BCAD szó helyét. Viszonylag nagy részarányban szerepeltek azok a megoldások is, ahol a tanulók az összes (24) szót helyes sorrendben felírták, és utána számolták ki, hogy hányadik a sorrendben a BCAD szó. A rossz megoldások többségének hátterében a helytelen ábécésorrendbe helyezés állt. Ezt kevésbé tulajdonítjuk annak a ténynek, hogy a tanulók nem ismerik az ábécésorrendet (ennek a megállapításunknak külön nyomatékot ad az a tény, hogy az ábécé első négy betűjéről volt szó), inkább a rendezett felsorolás képességének a hiánya áll a háttérben. Ezt a megállapításunkat még inkább alátámasztja az a tény, hogy többségében ugyanazok a tanulók adtak jó választ a 2., mint a 3. feladatra. A rossz válaszok esetében is előfordult az, hogy a tanuló helyesen felírta a képezhető 24 szót, majd azt a választ adta, hogy összesen 24 szó létezik. Mivel ez több különböző iskola tanulói között is előfordult (összesen 32 tanuló), nem tekinthetjük egyfajta „lokális" hibázásnak, inkább annak tulajdonítható, hogy a tanulók a rendszerezett felsorolás során a feladat végére érve „elfelejtették" a feladatban szereplő konkrét kérdést.

A 4. feladat esetében a „körmérkőzés" szó több esetben is gondot okozott, viszont a felmérésben részt vevő hallgatók elmagyarázták ennek a fogalomnak a jelentését. A jó választ adó tanulók kivétel nélkül a mérkőzések felsorolásával (a részt vevő személyek párba rendezésével) dolgoztak. Mivel a mérkőzések száma alacsony volt (6 mérkőzés), és minden egyes mérkőzés esetében csak két személyt kellett párba állítani, ezért nem körvonalazódott egyértelműen, hogy az egyes esetekben ötletszerű, illetve rendszerezett felsorolásról van-e szó. A hiányos megoldások alacsony részaránya is az összes eset alacsony számának tulajdonítható. Teljesen hiányoztak a számításon alapuló gondolatmenetek, például a tipikus $3 + 2 + 1 = 6$

válasz egyik dolgozatban sem szerepelt. Hiányoztak továbbá a mérkőzések lebonyolítását ábrázoló gráfok is. A válaszok értékelésekor fogalmazódott meg az ötlet, hogy megfelelőbb lett volna, ha a feladatban 6 vagy 8 versenyző szerepel, mivel így az összes eset felsorolása helyett a többi módszer is előtérbe kerülhetett volna.

Az 5. feladat esetében nagy többségében azok a tanulók adtak helyes választ, akik a rendszerezett felsorolást választották. A rendszerezést többféle szempont szerint végezték, legtöbben a két darab Z betű helyzetének a változtatásával voltak sikeresek. Az ötletszerű felsorolások esetében sok volt a hiányos válasz (legalább öt felsorolást megtaláltak), viszont többen voltak, akik csak 3 vagy 4 esetet találtak meg (ezeket a rossz válasz kategóriába soroltuk). A jó válaszok 27%-os részaránya is egy újabb bizonyíték arra nézve, hogy a negyedikes tanulóknak csak körülbelül egynegyede képes a rendszerezett felsorolásra, ezt a többi feladat esetében is tapasztaltuk.

Összegzés

A mérés megvalósítása során a mérésben részt vevő hallgatók különböző véleményeket fogalmaztak meg. Ugyanakkor egy fontos megállapítás majdnem minden hallgató elemzésében szerepelt, amely szerint a mérésben részt vevő tanulók többsége úgy nyilatkozott, hogy tanulmányaik során egyáltalán vagy nagyon ritkán találkoztak hasonló feladatokkal. Ezt elsősorban a tankönyvekben szereplő kombinatorikai feladatok alacsony számának tulajdonítjuk. Továbbá a pedagógusok többsége a tankönyvek tartalmát, illetve az azokban szereplő feladatokat igyekszik feldolgozni az oktatási folyamat során, a saját kreativitás igénybevételével önállóan alkotott feladatok kevésbé vannak jelen. Pedig a kombinatorikai feladatok sajátossága, hogy a matematika oktatása során bármely fejezet esetében előfordulhatnak.

A hipotéziseink vizsgálata során következtetéseinket a dolgozatok elemzése és a hallgatók megfigyelései alapján fogalmaztuk meg. Az első hipotézis beigazolódott, a tanulók negyedik évfolyamon már képesek az esetek megkülönböztetésére és szétválasztására. A tanulói megoldások közötti különbséget leginkább az okozta, hogy milyen szempontok alapján történt az esetek szétválasztása. A második hipotézisünk csak részben igazolódott, a tanulók viszonylag kis részarányban képesek az összes eset ötletszerű felsorolására. Ezt főként az 1. és a 4. feladatokban szereplő helyes válaszok részarányával támasztanánk alá, ugyanis ezeknek a feladatoknak az esetében a hat-hat sorba rendezési, illetve párba rendezési esetet könnyebben meg lehetett találni ötletszerű felsorolással is. A többi feladat esetében viszont az ötletszerű felsorolások leginkább hiányos megoldásokhoz vezettek, vagyis a tanulók az eseteknek legalább a felét megtalálták. A harmadik hipotézisünk vizsgálata során azt a következtetést vontuk le, hogy a tanulók körülbelül egy harmada képes a rendszerezett felsorolásra, ezeknek a tanulóknak a többsége minden feladatot helyesen oldott meg (vagy esetleg egyetlen feladat esetében a hibás megoldás a figyelmetlenségből eredt). Az elvárásaink között szerepelt, hogy a tanulók többsége (vagy legalábbis több mint a fele) képes a rendszerezett felsorolásra, így az egyharmados arány alulmaradt az eredeti elképzeléseinkhez képest. A negyedik hipotézisünk, amely szerint a tehetségesebb tanulók egy része már rendelkezik olyan alapvető problémamegoldási ötletekkel, amelyek a felső tagozatos tananyag részét képezik (szorzás módszere, összeadás módszere, esetek szétválasztása, kapcsolatok ábrázolása), egyáltalán nem igazolódott be. A dolgozatok elemzése során még nyomokban sem találtunk az említett felső tagozatos módszerekre, illetve az ezekhez való kapcsolódásra utaló dolgokat. Pedig az alsó tagozatos módszertanban is követelmény számba megy a fagráfok, illetve a különböző kapcsolatokra utaló teljes gráfok (például lejátszott mérkőzések ábrázolása) készítése, amely a szorzás módszerének alapját szolgáltatja.

A megfigyeléseink összegzése alapján megfogalmazódott az a gondolat, hogy a kombinatorika tanítását az alsó tagozaton új alapokra kell helyezni. A hallgatók egyöntetű véleménye volt, hogy a kombinatorikai feladatoknak a tanítás során a matematika minden fejezetében jelen kell lenni. Arra vonatkozóan, hogy a harmadik, illetve negyedik évfolyamon külön kombinatorika fejezeteknek is jelen kell lenni a tananyagban, a vélemények megoszlottak. Ezt továbbra is érdekes kérdésnek tekintjük, mivel a kifejezetten kombinatorikával foglalkozó fejezetek módszeres tanítása szembe menne azzal az elképzeléssel, amely szerint az alsó tanulók esetében a kombinatorikai feladatok nem explicit módon, hanem leginkább a mindennapi tapasztalatokon keresztül, illetve egy-egy matematikai fejezet tanításába ágyazva jelennek meg. A mérések eredményeit felhasználva újabb elképzelések jelentek meg a kutatás folytatására és kiszélesítésére vonatkozóan, erre nyomokban az eredmények feldolgozása során is utaltunk. Reményeink szerint a tanulmányban megfogalmazott következtetések és tapasztalatok hasznos támpontot jelentenek a gyakorló pedagógusok számára a kombinatorika oktatásának területén.

Irodalom

C. Neményi E. 2015. *Kombinatorika. Matematika segédanyag a tanítóképzéshez.* Budapest: ELTE Tanító- és Óvóképző Kar.

C. Neményi E.–Sztrókay V. 2006. *Matematika segédanyag az esti tanítóképzéshez.* Budapest: ELTE Tanító- és Óvóképző Főiskolai Kar.

English, L. D. 1991. Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics,* 22(5), 451–474.

English, L. D. 2005. Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In: Jones, G. A. (ed.): *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* 121–141. New York: Springer.

Heréndiné Kónya E. 2013. *A matematika tanítása alsó tagozaton.* Budapest: Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.

Lockwood, E.–Gibson, B. R. 2016. Combinatorial tasks and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 247–270.

Lovász L.–Pelikán J.–Vesztergombi K. 2014. *Kombinatorika.* Budapest: Typotex Kiadó.

Rakic, D.–Lazic, B.–Maric, M. 2021. The Influence of Differentiated Mathematical Tasks on Students' Logical-Combinatorial Thinking in Elementary Mathematics Teaching. *Slavonic Pedagogical Studies Journal* 10(1), 78–92.

Zapata-Cardona, L. 2018. Supporting Young Children to Develop Combinatorial Reasoning. *Early Mathematics Learning and Development*.